Lecc. 6. GEOMETRÍA

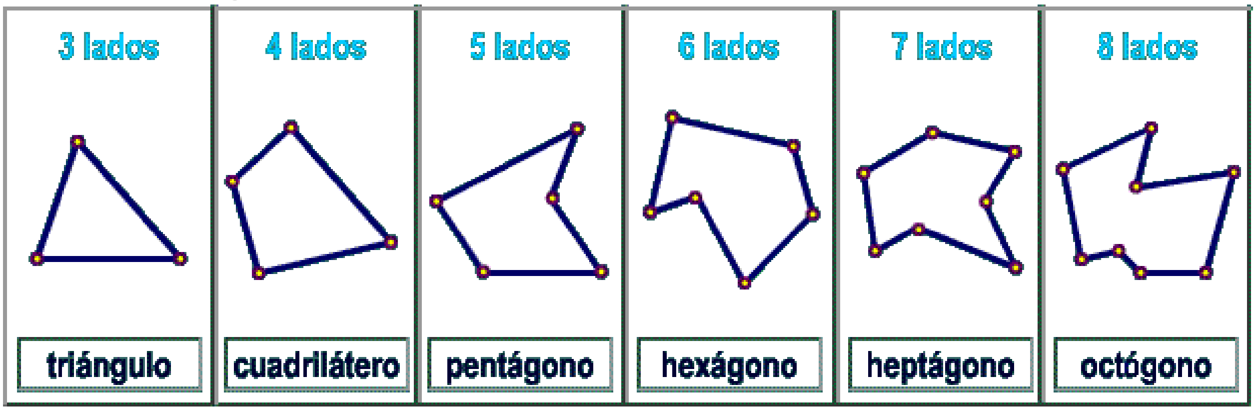
GEOMETRÍA PLANA: 1. Polígonos; 2. Triángulos. 3. Cuadriláteros. 4. Polígono regular; 5. Circunferencia y círculo
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: 6. Cuerpos en el espacio, Áreas; 7. Volúmenes

GEOMETRÍA PLANA

1. POLÍGONOS

Polígono es una figura plana, cerrada y limitada por segmentos.

Clasificación según número de lados



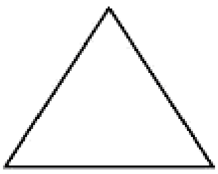
Lados: son los segmentos que forman el polígono
Vértices: son los extremos de los lados
Diagonales: son los segmentos determinados por cada dos vértices no consecutivos

2. TRIÁNGULOS

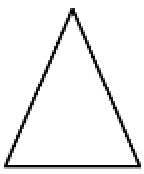
Triángulo es el polígono de tres lados.

Teorema: En todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es igual a 180º

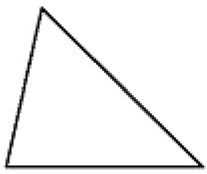
Clasificación según sus lados:



Equilátero:
3 lados iguales

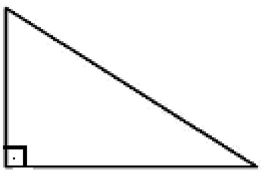


Isósceles:
2 lados iguales

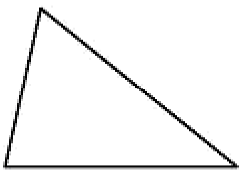


Escaleno:
3 lados desiguales

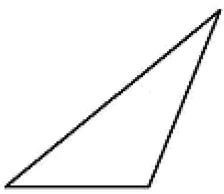
Clasificación según sus ángulos:



Rectángulo:
tiene un ángulo recto

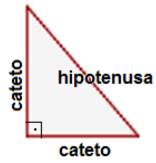


Acutángulo:
los tres ángulos agudos



Obtusángulo:
un ángulo obtuso

En el triángulo rectángulo llamamos:
Catetos, a los lados del ángulo recto.
Hipotenusa, al lado opuesto al ángulo recto



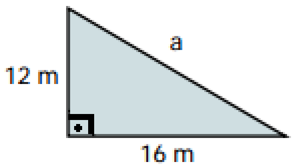
TEOREMA DE PITÁGORAS

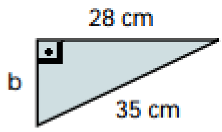
En todo triángulo rectángulo:

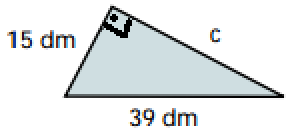
$$\textbf{cateto}^2 + \textbf{cateto}^2 = \textbf{hipotenusa}^2$$

2.1. Ejercicios:

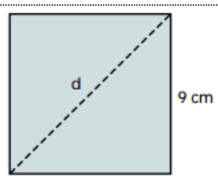
a) Calcula en cada figura el lado que falta



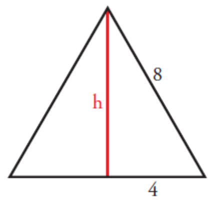




b) Calcula la diagonal de un cuadrado de 9 cm de lado.



c) Calcula la altura del triángulo equilátero de 8 cm lado.



d) Completa las siguientes ternas pitagóricas: (cat, cat, hip);

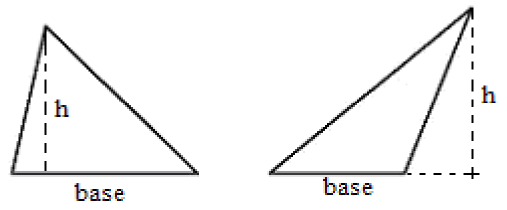
(3 , 4, h); (5, c, 13); (c, 8, 17);
(c, 24, 25); (20, 21, h); (9, c, 41).

2.2. Determina si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.
Sugerencia: aplica Pitágoras considerando catetos los lados más cortos; Compara con el tercer lado.

a) a = 15 cm, b = 10 cm, c = 11 cm
b) a = 35 m, b = 12 m, c = 37 m
c) a = 23 dm, b = 30 dm, c = 21 dm
d) a = 15 m, b = 20 m, c = 25 m
e) a = 11 m, b = 10 m, c = 7 m
f) a = 14 cm, b = 28 cm, c = 14 cm

Soluciones: a) Obtusángulo. b) Rectángulo. c) Acutángulo. d) Rectángulo. e) Acutángulo. f) Obtusángulo.

ÁREA DEL TRIÁNGULO

Altura de un triángulo es la recta perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación). Hay una altura sobre cada lado	

$$\acute{A}rea = \frac{base \bullet altura}{2}$$

2.3. Calcula:

a) El área de un triángulo de base = 12 cm y altura = 8 cm

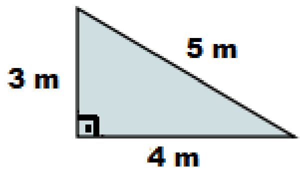
b) La base de un triángulo que tiene 14 cm^2 de área y 4 cm de altura

c) La altura de un triángulo que tiene 735 cm^2 de área y 42 cm de base

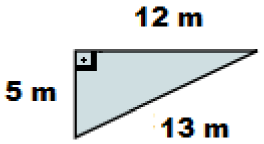
d) Área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 13 cm, y el desigual, 10 cm.

2.4. Calcula:

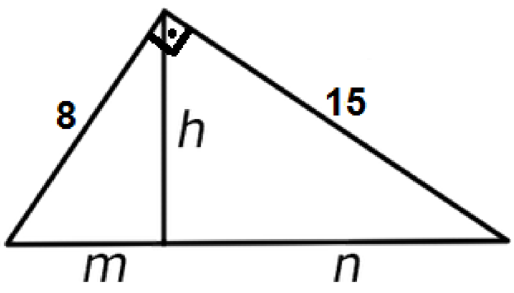
a) Calcula la altura sobre la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo:



b) Calcula la altura sobre la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo:



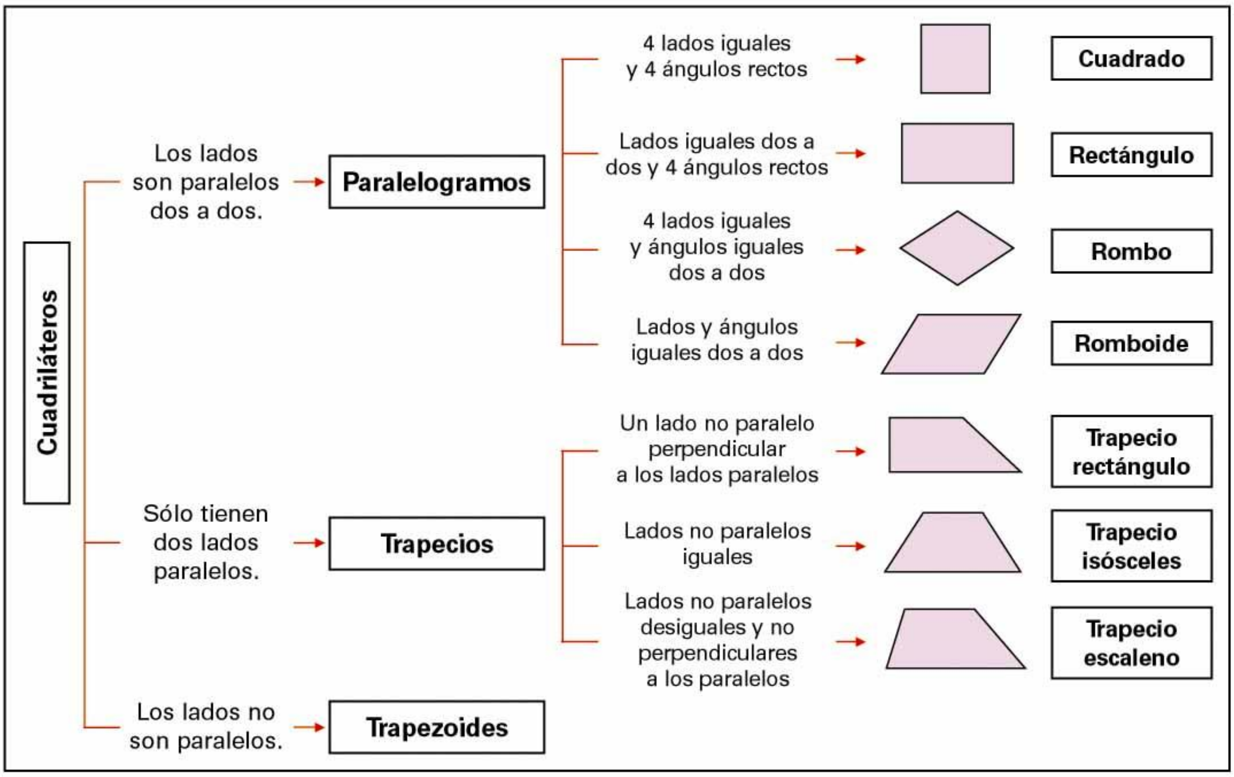
c) Calcula la hipotenusa, la altura h y los segmentos m y n



3. CUADRILATEROS

Cuadrilátero es el polígono de cuatro lados

Tipos:



Área de los Cuadriláteros:

Rectángulo (y cualquier paralelogramo): $A = \text{base} \cdot \text{altura}$ En el **cuadrado**, base y altura coinciden con el lado, por lo que se puede expresar: $A = \text{lado} \cdot \text{lado}$	El **Rombo** es un paralelogramo y sirve A = base x altura, pero también se puede calcular conociendo las diagonales: $A = \frac{D \bullet d}{2}$ **Trapecio**: $A = \frac{B + b}{2} \bullet h$

3.1. Ejercicios:

a) Halla el área de un rectángulo de 12 m de base y 8 m de altura

b) Halla el área de un rombo de diagonal mayor D = 9 m y diagonal menor d = 6 m

c) En un rombo d= 8 m y Área = 60 m^2, obtener la diagonal mayor D

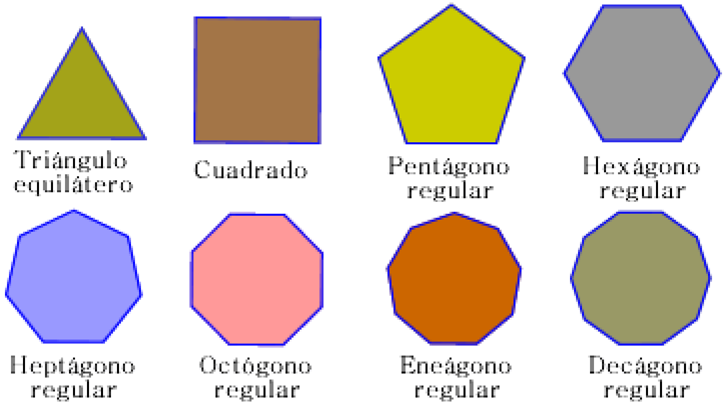
d) Halla el área de un trapecio isósceles de bases B= 18 m; b= 12 m y lado oblicuo 5 m

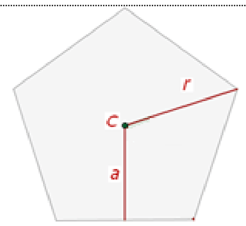
e) Halla la base de un rectángulo que tiene 52 dm^2 de área y 4 dm de altura

f) Halla el área de un trapecio rectángulo de bases 30 cm y 38 cm y lado oblicuo 17 cm.

4. POLÍGONO REGULAR

Polígono regular es el polígono que tiene sus ángulos y lados iguales



Centro C: Punto interior que equidista de cada vértice **Radio r:** segmento que une el centro con cada vértice. **Apotema a:** segmento que une el centro con el punto medio de un lado.	

4.1. Ejercicios:

a) Calcula el perímetro, la apotema y el radio y de un cuadrado de lado 10 cm. Calcula su área usando la fórmula del cuadrado y la del polígono regular.

b) Calcula la apotema y el área de un octógono regular de 7,84 m de radio y 6 m de lado

c) Calcula la apotema y el área de un pentágono regular de 5 m de radio y 5,30 m de lado

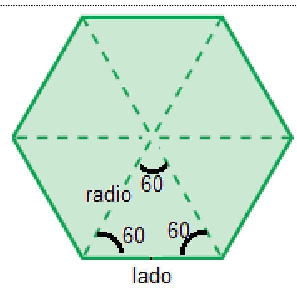
ÁREA DEL POLÍGONO REGULAR:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Un hexágono regular se descompone en seis triángulos.
El ángulo central vale 60º, por tanto los otros ángulos de cada triángulo miden también 120/2 = 60º.
Entonces **cada triángulo es equilátero**

Por tanto, en el hexágono regular, $\boxed{\textbf{lado = radio}}$

Esta particularidad solo la tiene el hexágono



4.2. Ejercicios:

a) Calcula el área del hexágono regular de lado 4 cm

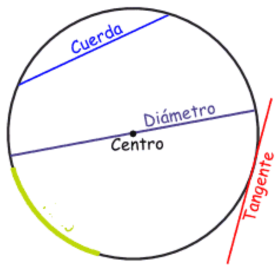
b) Calcula el área del hexágono regular de radio 6 m

5. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Circunferencia es la ***línea*** formada por puntos equidistantes de otro punto llamado centro

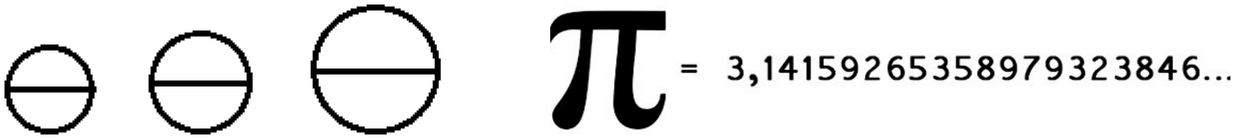
$$\text{longitud} = 2\cdot\pi\cdot r \qquad (\pi=3{,}14)$$

Radio: une el centro con cualquier punto de la circunferencia
Diámetro: une dos puntos de la circunf. y pasa por el centro
Cuerda: une dos puntos cualquiera de la circunferencia
Tangente: Recta exterior con un punto de contacto



El número π lo da la naturaleza:

π es el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro



5.1. Ejercicios:

a) Calcula la longitud de una circunferencia de 12 cm de radio.

b) Una rueda de bicicleta recorre 2,512 metros cuando da una vuelta. ¿Qué radio tiene la rueda? S: 40 cm.

c) Una rueda de un coche tiene de radio 20 cm. ¿Cuántos metros habrá recorrido cuando haya dado 15.000 vueltas?. S: 18.840 m

d) La Tierra tiene aproximadamente 40.000 Kilómetros de contorno, medido sobre el ecuador. ¿Cuál es su radio?. S: 6.369 km.

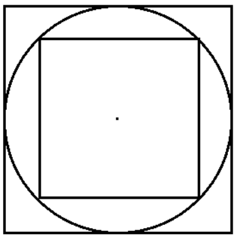
e) Una rueda tiene 25 cm de radio. ¿Cuántas vueltas debe dar para recorrer 20 km?. S: 12738 v

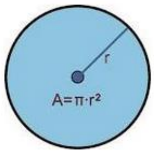
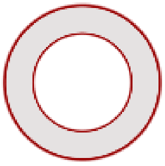
f) La longitud de una circunferencia es de 30 m. ¿Cuál es su diámetro?. S: 9,55

g) Una rueda dio 4000 vueltas para recorrer 10 km. Calcula su radio (en cm). S: 39,8 cm

h) La rueda de los caballitos ha dado 15 vueltas. ¿Qué distancia ha recorrido un caballito que está a 6 m del centro de giro. S: 565 m

i) Calcula el área de cada uno de los dos cuadrados de la figura, sabiendo que el radio de la circunferencia es de 2 m



Círculo es la ***superficie*** encerrada por la circunferencia Área = $\pi \cdot r^2$	
Corona circular Porción de círculo limitada por dos círculos concéntricos Área = $\pi \cdot (R^2 - r^2)$	

5.2. Ejercicios:

a) Calcula el área de un círculo de 12 cm de radio

b) Calcula el área de una plaza circular de 30 m de diámetro (antes calcula el radio)

c) Calcula el área de una corona circular de radio mayor = 30 cm y de radio menor 15 cm

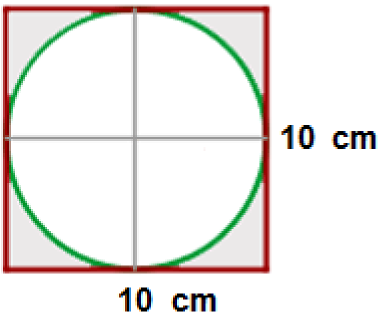
d) Calcula el área de una corona circular de radio mayor = 50 cm y de radio menor 35 cm

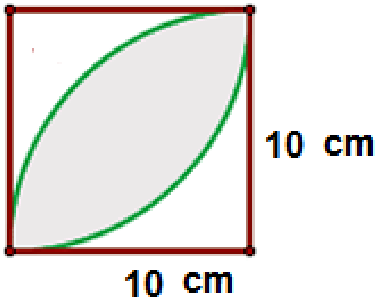
5.3. Ejercicios:

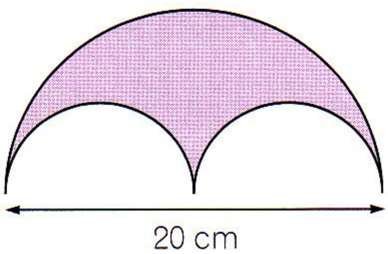
a) En un parque de forma circular de 40 m de radio hay situada en el centro una fuente, también de forma circular, de 5 m de radio. Calcula el área de la zona de paseo.

b) Calcula el área de la parte sombreada de la figura 1, si el lado del cuadrado mide 20 cm

c) Calcula el área de la parte sombreada de las siguientes figuras







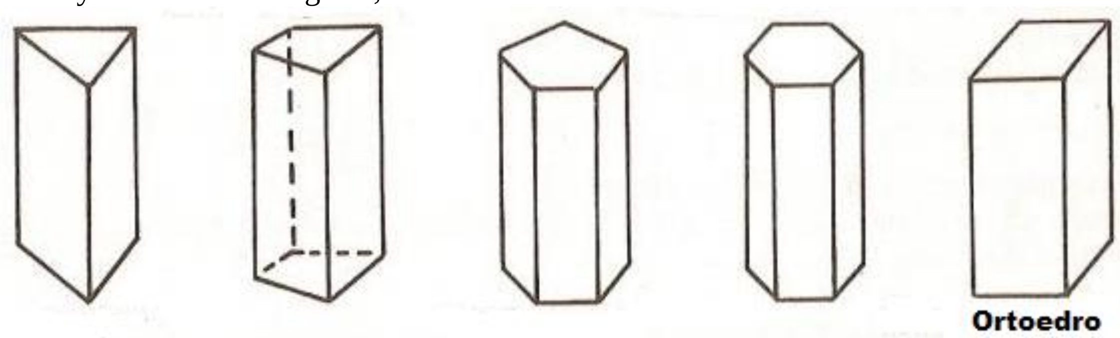
6. CUERPOS EN EL ESPACIO. ÁREAS

Poliedro es un cuerpo cerrado, limitado por superficies planas.

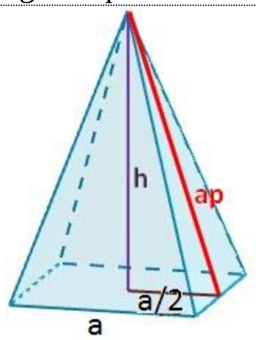
Prisma es el poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas (llamadas bases) y cuyas caras laterales son paralelogramos

Se llama **“prisma recto”** si las caras son perpendiculares a la base

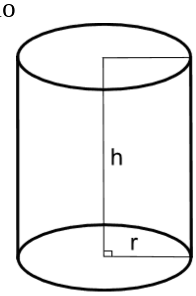
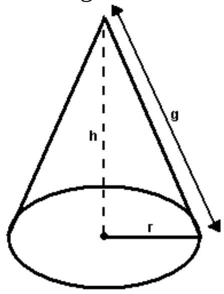
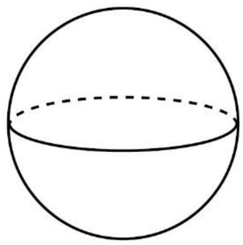
Si bases y caras son rectángulos, recibe el nombre de “**Ortoedro”**.



Pirámide es el poliedro con una cara polígono (**base de la pirámide),** y el resto de caras son triángulos que se unen en un punto llamado vértice de la pirámide

	Área total = $A_{base}+A_{lateral}$ = $$a^2 + \frac{Perímetro \cdot apotema}{2}$$

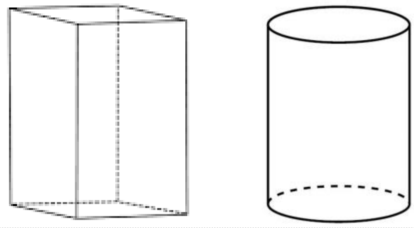
Cuerpos redondos son las figuras del espacio cerradas no limitadas por caras planas.

Cilindro: Se obtiene con la revolución de un rectángulo  Área total = $2 \cdot A_{base}+A_{lateral}$ = $2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$	**Cono:** Se obtiene con la revolución de un triángulo rectángulo  Área total = $A_{base}+A_{lateral}$ = $\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$	**Esfera:** Se obtiene por revolución de una circunferencia  Área = $4 \cdot \pi \cdot r^2$

7. VOLÚMENES

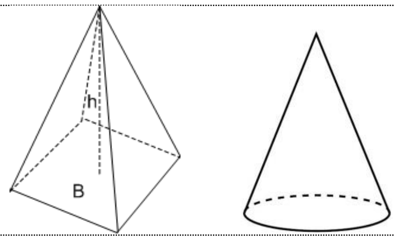
Volumen del prisma y del cilindro:

$$V = S_B \cdot h$$



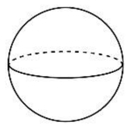
Volumen de la pirámide y del cono:

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3}$$



Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



Recuerda las unidades volumen y capacidad:

m^3			**dm^3**			**cm^3**
1000	100	10	**1**	0,1	0,01	**0,001**
Kl	Hl	Dl	**litro**	dl	cl	**ml**

7.1. Ejercicios - prisma:

a) Calcula el volumen (en litros) y área total de una habitación que tiene 3 m de largo, 5 m de ancho y 2,5 m de altura.

b) Calcula el volumen (en litros) y área total de un tetrabrik de leche que tiene una base de 9 cm de largo y 6 cm de ancho y una altura de 19 cm.

c) Calcula el volumen (en litros) y área lateral de una piscina de 10 m de largo, 6 m de ancho y 1,60 m de profundidad.

a) A = 70 m^2; V= 37500 litros. b) A= 678 cm^2. V= 1,02 litros; c) A= 51,2 m^2. V= 96000 litros;

7.2. Ejercicios - cilindro:

a) Calcula el volumen (en litros) y área total de un cilindro que tiene una base de 2 m de radio y una altura de 5 m.

b) Calcula el volumen (en litros) y área total de un cilindro que tiene una base de 2,5 m de radio y una altura de 6 m.

a) A = 87,92 m^2; V= 62800 litros. b) A= 117,75 m^2. V= 117750 litros;

7.3. Ejercicios - pirámide:

a) Calcula la apotema, el volumen (en litros) y área total de una pirámide que tiene una base cuadrada de 3 m de lado y una altura de 4 m.

b) Calcula la apotema, el volumen (en litros) y área total de una pirámide que tiene una base cuadrada de 4,5 m de lado y una altura de 5 m.

c) Calcula la apotema, el volumen (en litros) y área total de una pirámide de base cuadrada de 6 m de lado y con una apotema de la cara lateral de 5 m

a) Apot= 4,27; A = 34,62 m^2; V= 12000 litros. b) Apot=5,48; A= 49,32 m^2. V= 33750 litros;

7.4. Ejercicios - cono:

a) Calcula el volumen (en litros) y Área de un cono de radio base 3 m y altura 5 m.

b) Calcula el volumen (en litros) y Área de un cono de radio base 2,5 m altura 4 m.

c) Un cono tiene de volumen 1000 litros, y un radio de la base de 80 cm. Calcula su altura.

a) V= 47100 litros; g= 5,83 m; A= 83,18 m^2.

7.5. Ejercicios - esfera:

a) Obtener el área y el volumen (en litros) de una esfera de 1 m de radio.

b) Calcula el área y el volumen (en litros) de una esfera de diámetro 80 cm.

c) El balón reglamentario de fútbol es de cuero o similar, con un perímetro de 68 cm
Calcula su radio y su volumen

a) A = 12,56 m^2; V= 4,18 m^3. b) A= 80384 cm^2. V= 2.143.573 cm^3; c) R = 10,82cm, V= 5303 cm^3

7.6. Ejercicios repaso:

a) Una caja en forma de ortoedro tiene 9 cm de larga y 6 cm de ancha. Su área total es 228 cm^2. Halla su altura y su volumen.

b) El área total de un cubo es 150 cm^2. Halla su arista y su volumen.

c) Una esfera tiene un área de 452,16 cm^2. Calcula el radio y su volumen.

d) Un depósito cilíndrico de 10.000 litros tiene un diámetro de la base de 1,80 m
¿Cuál es su altura?

a) h=4 cm. V= 216 cm^3. b) a= 5 cm. V= 125 cm^3; c) R = 6cm, V= 904,32 cm^3; d) 3,931 m